数理解析研究所講究録
第 1561 巻 2007 年 79-85

EGOROFF 定理の成立性と RIESZ 空間の正則性

信州大学・工学部 河邊 淳* (Jun Kawabe)
瀧口 景太 (Keita Takiguchi)
Faculty of Engineering, Shinshu University

概要. 可測関数列の概一様収束性に関する Egoroff の定理は, Riesz 空間が Egoroff 性をもてば, 性質 (S) をもつ強順序連続な Riesz 空間値非加法的測度に対して成立する. また, Riesz 空間に Egoroff 性よりも真に弱い正則性である弱 σ-分配性を仮定した場合は, Egoroff の定理は一様自己連続, 強順序連続かつ下から連続な Riesz 空間値非加法的測度に対して成立する.

1. 序論

可測関数列の概一様収束性に関する Egoroff の定理 [2] は測度論における最重要定理の一つであるが, 非加法的測度に対しては一般には成立しない. 最近, 室伏ら [13] は, 非加法的測度に対して Egoroff の定理が成立するための必要十分条件 (Egoroff 条件) を発見し, 既に Li [8] により探し当てられていた条件である上及び下からの連続性が, Egoroff 条件に対する十分条件であることを指摘した. 彼らはさらに Egoroff 条件が成立するための二つの新たな十分条件も見出した (Li-Yasuda [9, 10, 11] も見よ).

一般に, 実数値非加法的測度論における定義や定理を Riesz 空間の枠組みで単に定式化するだけなら容易であることが多い. しかし, Riesz 空間では測度論で有効な ε-論法が機能しないので, 理論を展開するには何らかの滑らかさの条件 (正則性) を Riesz 空間に課すことが必要となる. 実際, [5] では, ε-論法の代わりに新たな滑らかさの条件 (漸近的 Egoroff 性) を Riesz 空間に課すことにより, Li [8] が与えた条件, すなわち, 上及び下からの連続性が Egoroff 条件に対する十分条件であることを証明した.

今回は室伏らの論文 [13] で与えられた残り二つの十分条件について考察する. これら二つの十分条件のうちの一つは強順序全連続性とよばれる条件で, これが Riesz 空間値非加法的測度の場合にも依然として十分条件となることは容易に示せる. しかし, もう一つの十分条件に関する結果, すなわち, 強順序連続かつ性質 (S) をも

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 28B15; Secondary 28E10, 46A40.
Key words and phrases. non-additive measure, Riesz space, Egoroff property, uniform autocontinuity, Egoroff theorem, Lebesgue theorem, Riesz theorem.
*Research supported by Grant-in-Aid for General Scientific Research No. 18540166, Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan.

つ Riesz 空間値非加法的測度が Egoroff 条件を満たすかどうかは自明な問題ではない．この論文では，Riesz 空間に滑らかさの条件 (Egoroff 性) を課すことにより，上記の問題が肯定的に解決できること，また，Eogorff 性よりも真に弱い滑らかさの条件である弱 σ-分配性を仮定した場合には，一様自己連続かつ強順序連続で下から連続な非加法的測度は Egoroff 条件を満たすことを報告する．さらに，可測関数列の収束に関する他の重要な定理，例えば Lebesgue 定理や Riesz 定理についても考察する．この論文は既に公表された論文 [6] の要約であり，証明などは原論分を参照していただきたい．

2. 記号と準備

以下では，自然数全体を $\mathbb{N}$，実数全体を $\mathbb{R}$ で表す．また，V は Riesz 空間とし，Riesz 空間論に関する標準的な用語や結果については [12] を見よ．

2.1. Riesz 空間の滑らかさの条件．この論文では，Riesz 空間の滑らかさとして以下の条件が必要となる．$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像全体を Θ で表す．

定義 2.1. (1) 2 重点列 $\{u_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \subset V$ は，それが順序有界で，各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $r_{i,j} \downarrow 0$，すなわち，各 $i, j \in \mathbb{N}$ に対して $r_{i,j} \geq r_{i,j+1}$ かつ各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $\inf_{j\in\mathbb{N}} r_{i,j} = 0$ を満たすとき，V の **regulator** という．

(2) 任意の regulator $\{r_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \subset V$ に対して，点列 $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ with $p_k \downarrow 0$ が存在して，各 $(k, i) \in \mathbb{N}^2$ に対して $j(k, i) \in \mathbb{N}$ を選んで $r_{i,j(k,i)} \leq p_k$ とできるとき，V は **Egoroff 性** (Egoroff property) をもつという [12].

(3) V は Dedekind σ-完備とする．任意の regulator$\{r_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \subset V$ に対して $\inf_{\theta\in\Theta} \sup_{i\in\mathbb{N}} r_{i,\theta(i)} = 0$ となるとき，V は**弱 σ-分配的** (weakly σ-distributive) という [18].

命題 2.2. V は Dedekind σ-完備とする．

(1) V が Egoroff 性をもてば V は弱 σ-分配的.

(2) V は順序可分とする．V が Egoroff 性をもつための必要十分条件は V が弱 σ-分配的.

注意 2.3. Holbrook [4, Example 4.2] によれば，S 上の実数値関数全体からなる Riesz 空間 $\mathbb{R}^S$ が Egoroff 性をもたないような非可算集合 S が存在する．しかし，そのような S に対しても $\mathbb{R}^S$ は弱 σ-分配的である．それゆえ，Dedekind σ-完備な Riesz 空間に対しては，弱 σ-分配性は Egoroff 性よりも真に弱い条件である．

多くの重要な関数空間や数列空間は Egoroff 性をもつ．例えば，[12, Exmaple 67.6, Theorem 71.6] を見よ．

2.2. Riesz 空間値非加法的測度. 以下では $(X,\mathcal{F})$ は可測空間，すなわち，$\mathcal{F}$ は空でない集合 X の部分集合からなる σ-集合体とする．

定義 2.4. 集合関数 $\mu:\mathcal{F}\to V$ は

(i) $\mu(\emptyset)=0$

(ii) $A,B\in\mathcal{F}$ で $A\subset B$ ならば $\mu(A)\le\mu(B)$ (単調増加性)

を満たすとき，**非加法的測度** (non-additive measure) という．

定義 2.5. 集合関数 $\mu:\mathcal{F}\to V$ は非加法的測度とする．

(1) 集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ と $A\in\mathcal{F}$ が $A_n\downarrow A$ を満たせば $\mu(A_n)\downarrow\mu(A)$ となるとき，μ は**上から連続** (continuous from above) という．

(2) 集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ と $A\in\mathcal{F}$ が $A_n\uparrow A$ を満たせば $\mu(A_n)\uparrow\mu(A)$ となるとき，μ は**下から連続** (continuous from below) という．

(3) 集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ と $A\in\mathcal{F}$ が $A_n\downarrow A$ かつ $\mu(A)=0$ を満たせば $\mu(A_n)\downarrow 0$ となるとき，μ は**強順序連続** (strongly order continuous) という [7].

(4) 任意の集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ with $\mu(A_n)\to 0$ が $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_{n_i})=0$ を満たす部分列 $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ をもつとき，μ は**性質 (S)** をもつという [16].

(5) 有向集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\subset\mathcal{F}$ と $A\in\mathcal{F}$ が $A_\alpha\downarrow A$ かつ $\mu(A)=0$ を満たせば $\inf_{\alpha\in\Gamma}\mu(A_\alpha)=0$ となるとき，μ は**強順序全連続** (strongly order totally continuous) という [13].

上から連続または強順序全連続ならば強順序連続である．可測空間 $(X,\mathcal{F})$ は，任意の集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ が収束する部分列 $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ をもち，その収束先が $\mathcal{F}$ に属する，すなわち，$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_{n_i}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}A_{n_i}\in\mathcal{F}$ のとき，**S-コンパクト** (S-compact) という．可測空間 $(X,\mathcal{F})$ が S-コンパクト (特に，X が可算集合) のときは，[10, Proposition 2] と同様にして，下からの連続性から性質 (S) が導かれる．実数値非加法的測度に関する情報については [1, 14, 17] を見よ．

3. Egoroff 定理

可測関数列の概一様収束性に関する Egoroff の定理は測度論における最重要定理の一つであるが，非加法的測度に対しては一般には成立しない．最近の論文 [13, Proposition 1] で室伏らは，Egoroff の定理が成立するための必要十分条件を発見したが，その条件は Riesz 空間の枠組みでも自然な形で記述できる．

定義 3.1. 集合関数 $\mu:\mathcal{F}\to V$ は非加法的測度とする．

(1) 2 重集合列 $\{A_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}\subset\mathcal{F}$ は

(E1) $m,n,n'\in\mathbb{N}$ で $n\le n'$ ならば $A_{m,n}\supset A_{m,n'}$

(E2) $\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{m,n}\right)=0$

を満たすとき，**μ-regulator** in $\mathcal{F}$ という.

(2) 任意の μ-regulator $\{A_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \subset \mathcal{F}$ に対して

$$\inf_{\theta\in\Theta} \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,\theta(m)}\right) = 0$$

が成り立つとき，μ は **Egoroff 条件**を満たすという.

注意 3.2. Li [9] は室伏らとは独立に，Egoroff の定理が実数値非加法的測度に対して成立するための別形式の必要十分条件を与え，それを**条件 (E)** とよんでいる.

定義 3.3. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to V$ は非加法的測度で，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数，f もそのような関数とする.

(1) 集合 $E \in \mathcal{F}$ with $\mu(E) = 0$ が存在して，任意の $x \in X - E$ に対して $f_n(x) \to f(x)$ が成り立つとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に **μ-概収束**するという.

(2) 単調減少な有向集合族 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset \mathcal{F}$ with $\mu(E_\alpha) \downarrow 0$ が存在して，各 $X - E_\alpha$ 上で f_n が f に一様収束するとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に **μ-概一様収束**するという.

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，点列 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ with $p_n \downarrow 0$ が存在して，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq p_n$ となるとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に **μ-確率収束**するという.

次の定理は [13, Proposition 1] の Riesz 空間への拡張になっている.

定理 3.4. 非加法的測度 $\mu : \mathcal{F} \to V$ に対して次の条件は同値:

(i) μ は Egoroff 条件を満たす.

(ii) Egoroff の定理が μ に対して成立する，すなわち，X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数 f に μ-概収束すれば，常に μ-概一様収束する.

論文 [13] の中の幾つかの結果は，Riesz 空間に何ら付加的な滑らかさの条件を課すことなく，Riesz 空間の枠組みへ同じ証明で拡張できる.

定理 3.5. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to V$ は非加法的測度とする.

(1) μ が強順序全連続ならば μ は Egoroff 条件を満たす.

(2) X は可算集合とする．次の 3 つの条件は同値:

  (i) μ は Egoroff 条件を満たす.

  (ii) μ は強順序全連続.

  (iii) μ は強順序連続.

しかし，“性質 (S) をもつ強順序連続な Riesz 空間値非加法的測度が Egoroff 条件を満たすか” という問題は自明ではない．次の定理は，Riesz 空間が Egoroff 性をもつ場合には，この問題を肯定的に解決できることを主張している.

定理 3.6. Dedekind σ-完備 Riesz 空間 V は Egoroff 性をもつとする．性質 (S) をもつ強順序連続な非加法的測度 $\mu : \mathcal{F} \to V$ は Egoroff 条件を満たす．

4. 一様自己連続の場合

この章では一様自己連続性と Egoroff 定理の成立性の関連について得られた結果を報告する．

定義 4.1. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to V$ は非加法的測度とする．

(1) 任意の集合列 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ with $\mu(B_n) \to 0$ に対して，点列 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ with $p_n \downarrow 0$ が存在して，すべての $A \in \mathcal{F}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mu(A \cup B_n) \leq \mu(A) + p_n$ が成り立つとき，μ は**上から一様自己連続** (uniformly autocontinuous from above) という．

(2) 任意の集合列 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ with $\mu(B_n) \to 0$ に対して，点列 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ with $p_n \downarrow 0$ が存在して，すべての $A \in \mathcal{F}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mu(A) \leq \mu(A - B_n) + p_n$ が成り立つとき，μ は**下から一様自己連続** (uniformly autocontinuous from below) という．

(3) 上から及び下から一様自己連続なとき，μ は**一様自己連続** (uniformly autocontinuous) という．

どんな劣加法的測度も一様自己連続である．次の結果は，定義 4.1 より容易に導ける．

命題 4.2. 非加法的測度 $\mu : \mathcal{F} \to V$ に対して，次の 3 つの条件は同値:

(i) μ は一様自己連続．

(ii) μ は上から一様自己連続．

(iii) μ は下から一様自己連続．

次の補題は，一様自己連続な非加法的測度に関する計算を行う場合に役立つ．

補題 4.3. 非加法的測度 $\mu : \mathcal{F} \to V$ に対して，次の 2 つの条件を考える:

(i) μ は上から一様自己連続．

(ii) 任意の集合列 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ with $\mu(B_n) \to 0$ に対して次の条件を満たす regulator $\{r_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \subset V$ が存在する: 各 $\theta \in \Theta$ に対して，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し，すべての $A \in \mathcal{F}$ と $n \geq n_0$ に対して $\mu(A \cup B_n) \leq \mu(A) + \sup_{i\in\mathbb{N}} r_{i,\theta(i)}$ が成り立つ．

このとき，(i) $\Rightarrow$ (ii) が成立．さらに，V が Dedekind 完備で弱 σ-分配的ならば，(i) と (ii) は同値．

Regulatorの列を制御するには次のFremlinの補題を活用する．例えば，[3, Lemma 1C]や[15, Theorem 3.2.3]を見よ．

補題 4.4. V は Dedekind σ-完備で，$\{r^k_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ $(k=1,2,\ldots)$ は V の regulator の列とする．固定した $e\in V$ with $e>0$ が与えられると，regulator $\{q_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}\subset V$ が存在して，任意の $\theta\in\Theta$ に対して

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\left\{e\wedge\sum_{k=1}^{m}\sup_{i\in\mathbb{N}} r^k_{i,\theta(i+k)}\right\}\leq\sup_{i\in\mathbb{N}} q_{i,\theta(i)}$$

が成り立つ．

定理 4.5. V は Dedekind σ-完備で $\mu:\mathcal{F}\to V$ は非加法的測度とする．V は弱 σ-分配的とする．μ が上から一様自己連続かつ下から連続ならば，各 $m\in\mathbb{N}$ に対して $\lim_{n\to\infty}\mu(A_{m,n})=0$ を満たす任意の2重集合列 $\{A_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}\subset\mathcal{F}$ に対して

$$\inf_{\theta\in\Theta}\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}A_{m,\theta(m)}\right)=0$$

が成り立つ．

系 4.6. V は Dedekind σ-完備で $\mu:\mathcal{F}\to V$ は非加法的測度とする．V は弱 σ-分配的とする．μ が上から一様自己連続かつ強順序連続かつ下から連続ならば，μ は Egoroff 条件を満たす．

注意 4.7. (一様) 自己連続かつ下から連続な実数値非加法的測度は性質 (S) を満たす [17, Theorem 5.10].

5. Lebesgue 定理と Riesz 定理

可測関数列の収束に関する他の重要な定理，例えば，Lebesgue の定理や Riesz の定理なども Riesz 空間値非加法的測度論の枠組みへ拡張できる．

定理 5.1 (The Lebesgue Theorem). 非加法的測度 $\mu:\mathcal{F}\to V$ に対して，次の条件は同値:

(i) μ は強順序連続.

(ii) μ に対して Lebesgue の定理が成り立つ，すなわち，X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数 f に μ-概収束すれば，常に μ-測度収束する．

定理 5.2 (The Riesz Theorem). V は Egoroff 条件を満たすとする．非加法的測度 $\mu:\mathcal{F}\to V$ に対して，次の条件は同値:

(i) μ は性質 (S) をもつ．

(ii) μ に対して Riesz の定理が成り立つ，すなわち，X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ が X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数 f に μ-測度収束すれば，$\{f_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ は μ-概収束する部分列をもつ.

参考文献

[1] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, second ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[2] D.-Th. Egoroff, Sur les suites des fonctions mesurables, C. R. Acad. Sci. Paris 152 (1911) 244–246.

[3] D.H. Fremlin, A direct proof of the Matthes-Wright integral extension theorem, J. London Math. Soc. (2) 11 (1975) 276–284.

[4] J.A.R. Holbrook, Seminorms and the Egoroff property in Riesz spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968) 67–77.

[5] J. Kawabe, The Egoroff theorem for non-additive measures in Riesz spaces, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 2762–2770.

[6] J. Kawabe, The Egoroff property and the Egoroff theorem in Riesz space-valued non-additive measure theory, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 50–57.

[7] J. Li, Order continuous of monotone set function and convergence of measurable functions sequence, Appl. Math. Comput. 135 (2003) 211–218.

[8] J. Li, On Egoroff's theorems on fuzzy measure spaces, Fuzzy Sets and Systems 135 (2003) 367–375.

[9] J. Li, A further investigation for Egoroff's theorem with respect to monotone set functions, Kybernetika 39 (2003) 753-760.

[10] J. Li, M. Yasuda, Egoroff's theorem on monotone non-additive measure spaces, Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 12 (2004) 61–68.

[11] J. Li, M. Yasuda, On Egoroff's theorems on finite monotone non-additive measure space, Fuzzy Sets and Systems 153 (2005) 71–78.

[12] W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen, Riesz Spaces I, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[13] T. Murofushi, K. Uchino, S. Asahina, Conditions for Egoroff's theorem in non-additive measure theory, Fuzzy Sets and Systems 146 (2004) 135–146.

[14] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[15] B. Riečan, T. Neubrunn, Integral, Measure, and Ordering, Kluwer Academic Publishers, Bratislava, 1997.

[16] Q. Sun, Property (S) of fuzzy measure and Riesz's theorem, Fuzzy Sets and Systems 62 (1994) 117–119.

[17] Z. Wang, G.J. Klir, Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York, 1992.

[18] J.D.M. Wright, The measure extension problem for vector lattices, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 21 (1971) 65–85.